Аналитични зависимости, използвани в цифровата фотограметрия при кадрови снимки

При цифровите кадрови изображения връзката между образа на точка от изображението и нейният първообраз може да бъде определена като се отчита геометричния модел на формираното изображение (начина на формиране на изображението). Когато всички образи на точки от изображението са формиране в едно и също време се приема ,че закона за формиране на изображението е централната перспектива. Тоест между първообраза и образа на обекта и центъра на проектиране съществуват проективни зависимости, които могат да бъдат математически описани, използвайки законите на централната перспектива. Такива изображения се наричат кадрови. Параметрите, които позволяват да се дефинира връзката между образа и първообраза, така че да се получи съответствие на възприетия геометричен модел на формираното изображение се наричат елементи на външното ориентиране за снимката (ЕВО). Те позволяват да се дефинира еднозначно съответствие, описано със закона за проектиране между обекти от изображението и техните първообрази. Когато проектирането се извършва по законите на централната перспектива (приема се че светлинните лъчи се разпространяват праволинейно) проектиращите връзки се изразяват в постигане на съответствие при построяване на аналитичния модел между първообраза, центъра на проектиране и образа на обекта като се приема , че това съответствие отговаря на централна перспектива. Основните зависимости в аналитичната фотограметрия служат за изразяване на това съответствие. По този начин ЕВО изразяват връзката между първообраза и образа на обекта, съгласно възприетия геометричен модел на формираното изображение. За да се опишат и дефинират ЕВО се използва координатен преход между следните координатни системи: образна- моделна- геодезическа.

ЕВО се разделят на две групи:

-*елементи на относителното ориентиране*: дефинират взаимното положение между центъра на проектиране и образите на точките от изображението. За тяхното дефиниране и определяне се използват образната и моделната координатни системи и произтичащите от това връзки

-*елементи на абсолютното ориентиране*: дефинират връзката между моделната и геодезическата координатна система.

Елементите на външното ориентиране са дванадесет на брой (пет на относителното и седем на абсолютното ориентиране). Могат да въдат разгледани следните случаи:

за единична снимка те са :

$$\alpha,\omega,\chi,(X_S),Y_S,Z_S,\xi,\eta,\theta,X_O,Y_O,Z_O,t \qquad (70)$$

$\alpha,\omega,\chi,(X_S),Y_S,Z_S$ са елементи на относително ориентиране

α,ω,χ -ъгли на ротация между едноименните оси на образната и моделната координатна система.

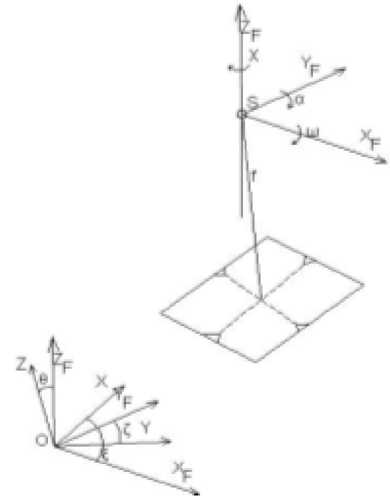
$(X_S), Y_S, Z_S$ -са координатите на центъра на проектиране в моделната координатна система;

$\xi, \varsigma, \theta, t, X_O, Y_O, Z_O$ -елементи на обсолютното ориентиране;

ξ, ς, θ -ъгли на ротация между едноименните оси на моделната и геодезическата координатна система;

X_O, Y_O, Z_O -координати на центъра на проектиране в геодезическата координатна система;

t–мащабен коефициент за разлика в мащаба на моделната и геодезическата координатна система.

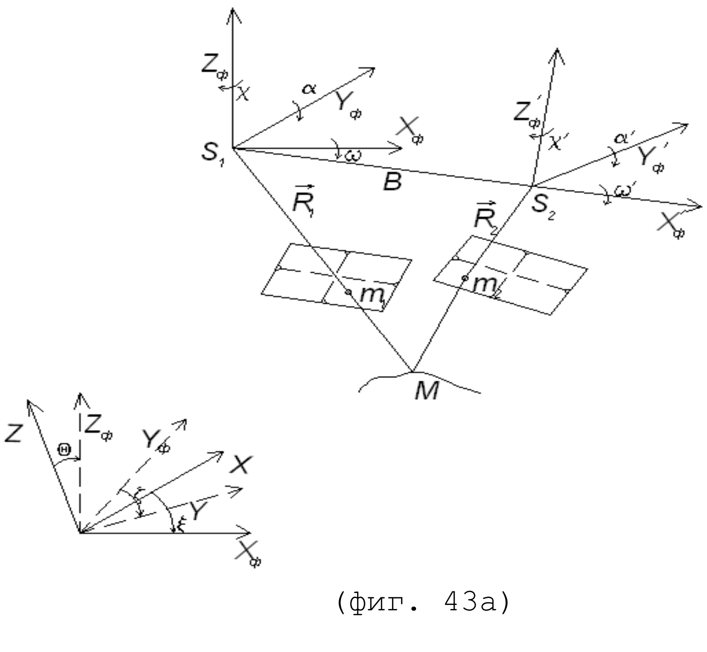


(фиг. 42)

за стереодвойка се срещат два случая:

при независима стереодвойка (фиг.43а)

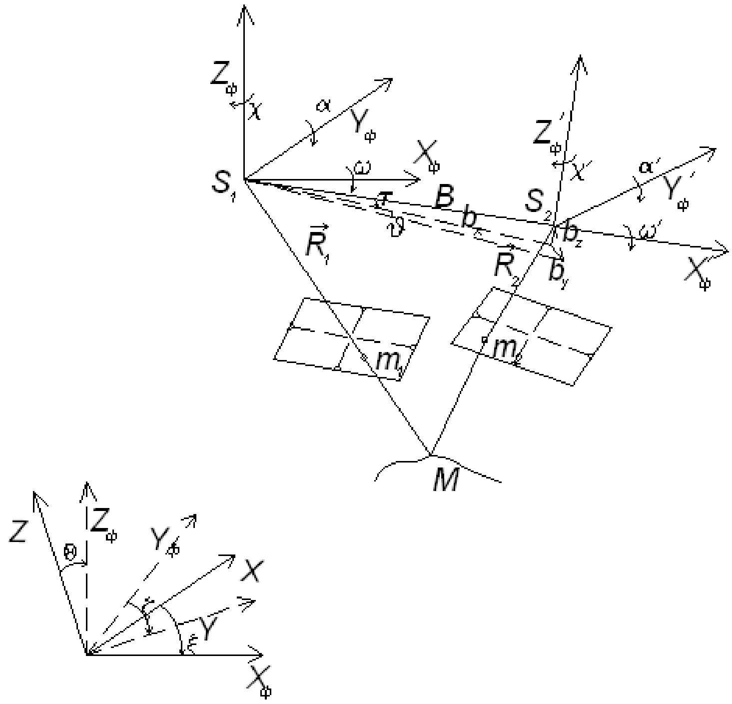
$$\alpha_1, \chi_1, \alpha_1, \chi_1, \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \xi, \varsigma, \theta, t, X_{S_1}, Y_{S_1}, Z_{S_1} \quad (71)$$



(фиг. 43а)

при прикачена стереодвойка (фиг.43б)

$$\alpha,\omega,\chi,\nu,\tau,\xi,\varsigma,\theta,t,X_{S_1},Y_{S_1},Z_{S_1} \qquad (72)$$



(фиг. 43б)

В изразите (71) и (72) значението на означенията е както следва:

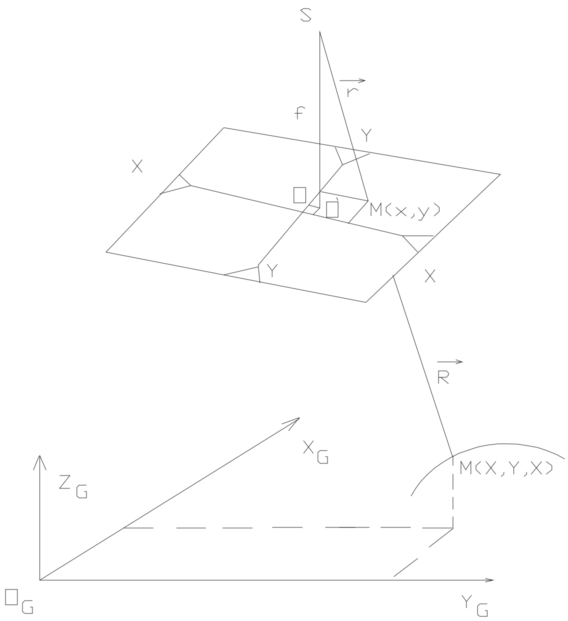
$\alpha_1,\chi_1,\alpha_2,\chi_2,\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$–елементи на относително ориентиране на независима стереодвойка, като α_1,χ_1,ω_1 са ъглите на ротация за лявата снимка, а α_2,χ_2,ω_2на дясната снимка;

$\alpha_1,\omega_1,\chi_1,\nu,\tau$–елементи на относително ориентиране на прикачена стереодвойка като α_1,ω_1,χ_1 са ъглите на ротация за лявата снимка, ν,τ са ъглите под които се виждат съответно базисните компоненти b_Yи b_Z.

От казаното по-горе за ЕВО може да се направи извода, че при разглеждане на две изображение като образуващи стереодвойка и само на единично изображение броят на ЕВО не се променя.

Условие за колинеарност.

Елементарно построение при кадровите изображения е единичната връзка, която определя положението на снимачния център в координатната система на снимката (фиг.44)



(фиг.44)

Образните координати на коя да е точка от снимката се определят от вектора:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ -f \end{bmatrix} \qquad (73)$$

,където $\mathbf{x_o}$ и $\mathbf{y_o}$ са координатите на главната точка на снимката, **f** е фокусното разстояние на камерата. Често при фотограметричните построения като връзка между координатите на точки от местността и техните изображения се използват формули за преобразуване на правоъгълни координати в пространството, даващи връзките между използваните координатни системи (образна, фотограметрична и геодезическа).

Във фотограметрична координатна система положението на единична снимка се определя от елементите на външното ориентиране.(Това са координатите на центъра на проектиране (**Xs , Ys , Zs**); ъглите на завъртане на снимката спрямо осите на координатната система (α,ω,χ). Последните се явяват функции на матрицата на ротация:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (74)$$

,където $a_{1-3}, b_{1-3}, c_{1-3}$ са направляващите косинуси , изразяващи се чрез ъглите на наклона и завъртане по формули :

$$a_1 = \cos\alpha\cos\chi - \sin\alpha\sin\omega\sin\chi \qquad b_1 = \cos\omega\sin\chi$$

$$a_2 = \cos\alpha\sin\chi - \sin\alpha\cos\omega\cos\chi \qquad b_2 = \cos\omega\cos\chi$$

$$a_3 = \sin\alpha\cos\omega \qquad b_3 = \sin\omega$$
$$c_1 = \sin\alpha\cos\chi + \cos\alpha\sin\omega\sin\chi$$
$$c_2 = \sin\alpha\sin\chi + \cos\alpha\sin\omega\cos\chi$$
$$c_3 = \cos\alpha\cos\omega \qquad (75)$$

Ъглите на наклона и на завъртането могат да се определят съгласно:

$$\alpha = arctg\left(\frac{a_3}{c_3}\right); \omega = \arcsin(-b_3); \chi = arctg\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \qquad (76)$$

Връзката между координатите на точка от снимката **m** и точка от местността **M** се изразява с условието за колинеарност на три точки **m**, **S** и **M**. Във векторна форма това условие има вида:

$$\vec{r} = t \cdot A^{`} \cdot \vec{R} \qquad (77)$$

,където $\vec{r}$ е радиус векторът във фотограметричната координатна система , а $\vec{R}$ в геодезическата. В координатната система на местността то добива вида:

$$t \cdot \vec{R} = A \cdot \vec{r} \qquad (78)$$

,където:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{bmatrix}; \vec{R} = \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix} \qquad (79)$$

t е мащабен коефициент;

A` е транспонираната по отношение на **A** матрица на ротация.

Условието за колинеарност в координатна форма има вида:

$$x = -f\frac{\Delta X^{`}}{\Delta Z^{`}}; y = -f\frac{\Delta Y^{`}}{\Delta Z^{`}}$$
$$X - X_S = \Delta X^{`} = a_1 \cdot \Delta X + b_1 \cdot \Delta Y + c_1 \cdot \Delta Z$$
$$Y - Y_S = \Delta Y^{`} = a_2 \cdot \Delta X + b_2 \cdot \Delta Y + c_2 \cdot \Delta Z$$
$$Z - Z_S = \Delta Z^{`} = a_3 \cdot \Delta X + b_3 \cdot \Delta Y + c_3 \cdot \Delta Z \qquad (80)$$

а в системата от координати на местността:

$$X = Z \cdot \frac{\Delta X}{\Delta Z}; Y = Z \cdot \frac{\Delta Y}{\Delta Z}$$

, тук

$$X = a_1 \cdot x + a_2 \cdot y - a_3 \cdot f$$
$$Y = b_1 \cdot x + b_2 \cdot y - b_3 \cdot f$$
$$Z = c_1 \cdot x + c_2 \cdot y - c_3 \cdot f \qquad (81)$$

При фотограметричните построения се използва и така наречената "*хоризонтална снимка*", ъглите на наклона и завъртането на която в приетата координатна система са нули.

Връзката между хоризонтална и наклонена снимка, имащи общ център на проектиране също се определя от условието за колинеарност чрез формули :

$$x^o = -f \cdot \frac{X}{Z}; y^o = -f \cdot \frac{Y}{Z} \qquad (82)$$

$$x = -f \cdot \frac{X^o}{Z^o}; y = -f \cdot \frac{Y^o}{Z^o} \qquad (83)$$

След развитие в ред по Тейлор и последваща линеаризация при обработка по МНМК уравнения на поправките произтичащи от това условие добиват вида :

$$\begin{aligned} v &= A_1 \delta X_{S_i} + A_2 \delta Y_{S_i} + A_3 \delta Z_{S_i} + A_4 \delta \alpha_i + A_5 \delta \omega_i + A_6 \delta \chi_i + \dots \\ &\dots + A_7 \delta X_{S_j} + A_8 \delta Y_{S_j} + A_9 \delta Z_{S_j} + A_{10} \delta \alpha_j + A_{11} \delta \omega_j + A_{12} \delta \chi_j + L; \end{aligned} \qquad (84)$$

A₁..A₁₂ са частните производни на функцията по отношение на неизвестните, а L са свободните членове, имащи съответно вида :

$$A_1 = \left[Z_{m_j} Y_{m_i} - Y_{m_j} Z_{m_i} \right]; A_2 = \left[Z_{m_j} X_{m_i} - Z_{m_i} X_{m_j} \right];$$

$$A_3 = \left[X_{m_i} Y_{m_j} - X_{m_j} Y_{m_i} \right];$$

$$A_4 = \left[X_{S_j} - X_{S_i} \right] \cdot \left[Z_{m_j} \frac{dY_{m_i}}{d\alpha_i} - Y_{m_j} \frac{dZ_{m_i}}{d\alpha_i} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[Y_{S_j} - Y_{S_i} \right] \cdot \left[Z_{m_j} \frac{dX_{m_i}}{d\alpha_i} - X_{m_j} \frac{dZ_{m_i}}{d\alpha_i} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[Z_{S_j} - Z_{S_i} \right] \cdot \left[Y_{m_j} \frac{dX_{m_i}}{d\alpha_i} - X_{m_j} \frac{dY_{m_i}}{d\alpha_i} \right];$$

$$A_5 = \left[X_{S_j} - X_{S_i} \right] \cdot \left[Z_{m_j} \frac{dY_{m_i}}{d\omega_i} - Y_{m_j} \frac{dZ_{m_i}}{d\omega_i} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[Y_{S_j} - Y_{S_i} \right] \cdot \left[Z_{m_j} \frac{dX_{m_i}}{d\omega_i} - X_{m_j} \frac{dZ_{m_i}}{d\omega_i} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[Z_{S_j} - Z_{S_i} \right] \cdot \left[Y_{m_j} \frac{dX_{m_i}}{d\omega_i} - X_{m_j} \frac{dY_{m_i}}{d\omega_i} \right];$$

$$A_6 = \left[X_{S_j} - X_{S_i} \right] \cdot \left[Z_{m_j} \frac{dY_{m_i}}{d\chi_i} - Y_{m_j} \frac{dZ_{m_i}}{d\chi_i} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[Y_{S_j} - Y_{S_i} \right] \cdot \left[Z_{m_j} \frac{dX_{m_i}}{d\chi_i} - X_{m_j} \frac{dZ_{m_i}}{d\chi_i} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[Z_{S_j} - Z_{S_i} \right] \cdot \left[Y_{m_j} \frac{dX_{m_i}}{d\chi_i} - X_{m_j} \frac{dY_{m_i}}{d\chi_i} \right];$$

$$A_7 = A_1; A_8 = A_2; A_9 = A_3; \qquad (85)$$

$$A_{10}=\left[X_{S_j}-X_{S_i}\right]\cdot\left[Y_{m_i}\frac{dZ_{m_j}}{d\alpha_j}-Z_{m_i}\frac{dY_{m_j}}{d\alpha_j}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[Y_{S_j}-Y_{S_i}\right]\cdot\left[X_{m_i}\frac{dZ_{m_j}}{d\alpha_j}-Z_{m_i}\frac{dX_{m_j}}{d\alpha_j}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[Z_{S_j}-Z_{S_i}\right]\cdot\left[X_{m_i}\frac{dY_{m_j}}{d\alpha_j}-Y_{m_i}\frac{dX_{m_j}}{d\alpha_j}\right];$$
$$A_{11}=\left[X_{S_j}-X_{S_i}\right]\cdot\left[Y_{m_i}\frac{dZ_{m_j}}{d\omega_j}-Z_{m_i}\frac{dY_{m_j}}{d\omega_j}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[Y_{S_j}-Y_{S_i}\right]\cdot\left[X_{m_i}\frac{dZ_{m_j}}{d\omega_j}-Z_{m_i}\frac{dX_{m_j}}{d\omega_j}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[Z_{S_j}-Z_{S_i}\right]\cdot\left[X_{m_i}\frac{dY_{m_j}}{d\omega_j}-Y_{m_i}\frac{dX_{m_j}}{d\omega_j}\right];$$
$$A_{12}=\left[X_{S_j}-X_{S_i}\right]\cdot\left[Y_{m_i}\frac{dZ_{m_j}}{d\chi_j}-Z_{m_i}\frac{dY_{m_j}}{d\chi_j}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[Y_{S_j}-Y_{S_i}\right]\cdot\left[X_{m_i}\frac{dZ_{m_j}}{d\chi_j}-Z_{m_i}\frac{dX_{m_j}}{d\chi_j}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[Z_{S_j}-Z_{S_i}\right]\cdot\left[X_{m_i}\frac{dY_{m_j}}{d\chi_j}-Y_{m_i}\frac{dX_{m_j}}{d\chi_j}\right];$$
$$L=\left[X_{S_j}{}^0-X_{S_i}{}^0\right]\cdot\left[Z^0{}_{m_j}Y_{m_i}{}^0-Y^0{}_{m_j}Z^0{}_{m_i}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[Y_{S_j}{}^0-Y_{S_i}{}^0\right]\cdot\left[Z^0{}_{m_j}X_{m_i}{}^0-X^0{}_{m_j}Z^0{}_{m_i}\right]+\ldots \qquad (86)$$
$$\ldots+\left[Z_{S_j}{}^0-Z^0{}_{S_i}\right]\cdot\left[Y^0{}_{m_j}X_{m_i}{}^0-X^0{}_{m_j}Y^0{}_{m_i}\right]$$

Във формули (86) –**$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$** –са коефициенти от ротационна матрица.