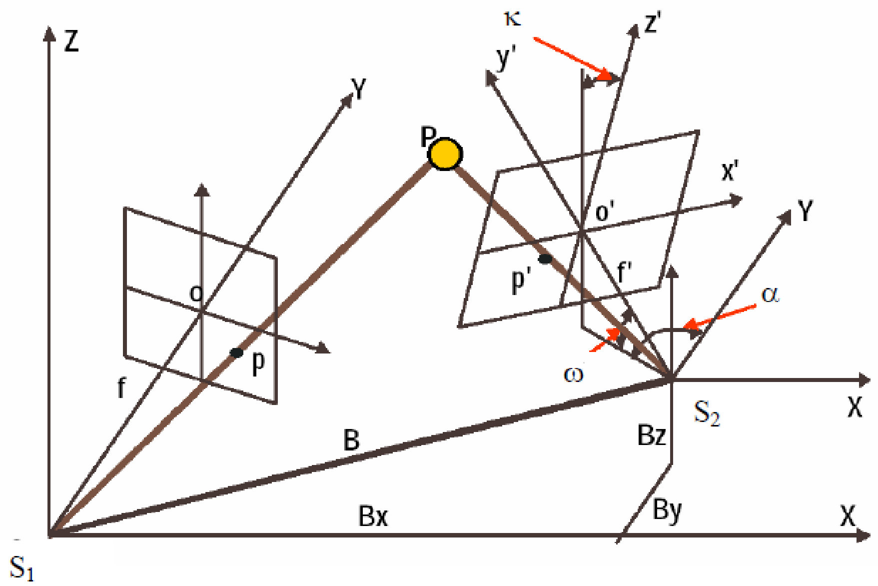
Епиполарна геометрия. Приложение в цифровата фотограметрия.

Взаимното ориентиране има за цел да възстанови относителното положение и завъртане на две съседни снимки. За описването са необходими 5 параметъра. Нека позицията и ориентацията на едната снимка (лявата) са известни и началото на общата координатна система е в перспективният център на първото изображение $\mathbf{S_1}$ (фиг 34).



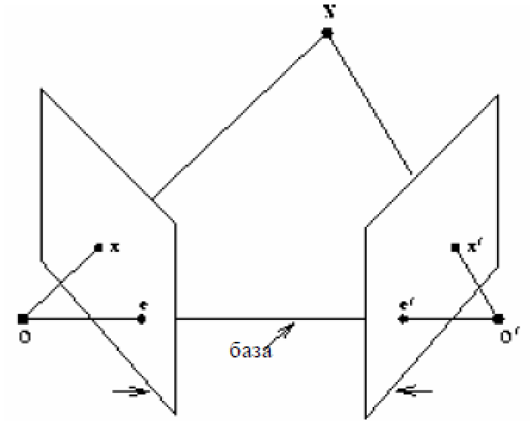
(фиг.34)

В - разстоянието между двата перспективни центъра - базисна линия

- **Bx, By** и **Bz** - компонентите съставящи **B**
- **ω** - наклон на камерата спрямо главния снимачен лъч
- **κ** - превъртане на снимката
- **α** - ъгълът между **Y** и оптическата ос

За ориентиране на двете изображения се използват принципите на епиполарната геометрия.

Епиполарната геометрия описва връзката между две изображения и фундаменталното геометрично взаимоотношение между два проекционни центъра (фиг. 35).



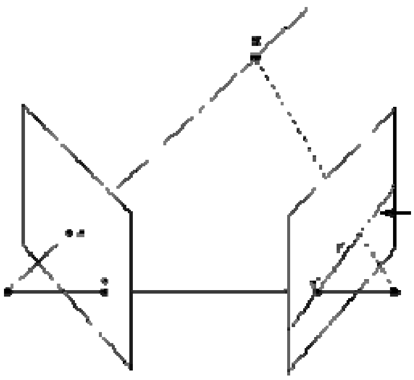
(фиг.35)

Епиполюсът е прободът на правата на базата със съответната образна равнина. Епиполюсът е образа на проекционния център на едната камера в образната равнина на другата камера;

Епиполарна равнина е равнината, определена от една пространствена точка и оптическите центрове;

Епиполарна линия е пресечницата на епиполарната равнина и образната равнина. Всички епиполарни линии се пресичат в епиполюса (фиг 36).

Множеството от епиполарните равнини се нарича *епиполарен сноп*.

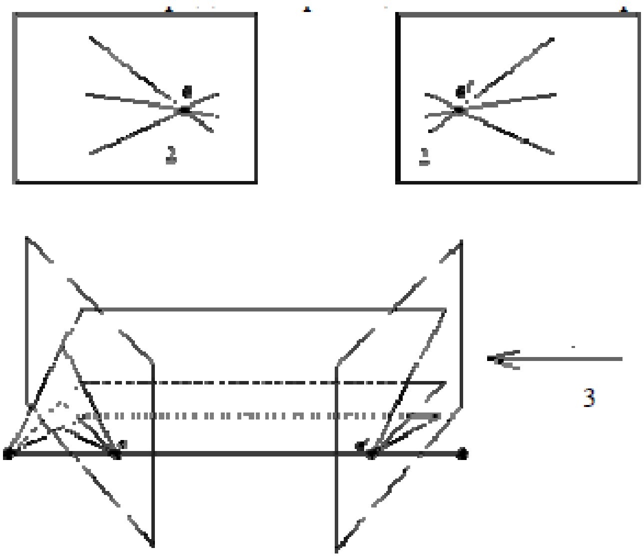


(фиг.36)

Една точка от едното изображение създава линия в другото, на която съответната точка трябва да принадлежи. Търсенето на съответна точка се стеснява от област до линия. Това ограничение възниква, защото образните точки, представящи една и съща пространствена точка, образните точки, пространствената точка и оптическите центрове са компланарни.

Степени на свобода. Епиполарната геометрия зависи само от относителното положение (позиция и ориентация) и елементите на вътрешно ориентиране на камерата, т.е. местоположението на главните точки и образните равнини (фиг. 37). Съществуват 7 степени на свобода

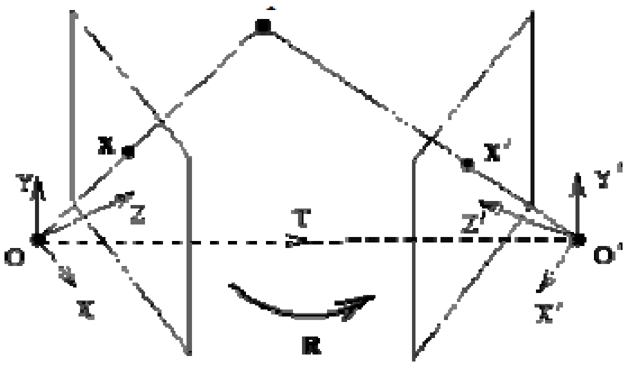
• По 2 определят еполюсите на двете изображения ;
• 3 определят проекцията на еполярните снопове.



(фиг.37)

Фундаменталната матрица е алгебричното описание на еполярната геометрия.

Математическото описание на еполярната геометрия се дава от основната и фунадаментална матрици.(фиг.38)



(фиг.38)

Нека има две координатни системи с начала в проекционните центрове на двете изображения. Те са свързани помежду си с матрицата R завъртане и b транслация

$$X' = RX + T$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = s_2.\boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{p}_1 = s_1.\boldsymbol{u}_1 \qquad (38)$$

Може да се напише:

$$\boldsymbol{u}_2.(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{R}.\boldsymbol{u}_1) = 0$$
$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_B & y_B & z_B \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (39)$$
$$x_2.(y_B.Z_1 - z_B.Y_1) + y_2.(z_B.X_1 - x_B.Z_1) + z_2.(x_B.Y_1 - y_B.X_1) = 0$$
$$x_2.[-z_B.(r_{21}.x_1 + r_{22}.y_1 + r_{23}.z_1) + y_B.(r_{31}.x_1 + r_{32}.y_1 + r_{33}.z_1)]$$
$$+y_2.[z_B.(r_{11}.x_1 + r_{12}.y_1 + r_{13}.z_1) - x_B.(r_{31}.x_1 + r_{32}.y_1 + r_{33}.z_1)]$$
$$-y_B.(r_{11}.x_1 + r_{12}.y_1 + r_{13}.z_1)] + z_2.[x_B.(r_{21}.x_1 + r_{22}.y_1 + r_{23}.z_1) = 0 \qquad (40)$$

Което представя, че векторите **OX**, **O'X** и **OO'** са копланарни. Също така знаем, че:

$$x_c = f\frac{X}{Z} \text{ и } x_c' = f'\frac{X'}{Z'} \qquad (41)$$

Следва връзката между образните координати и координатите за камерата:

$$\boldsymbol{p}_2.(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{R}.\boldsymbol{p}_1) = 0 \qquad (42)$$

която може да се запише по следния начин:

$$\boldsymbol{u}_2^t.\boldsymbol{M}.\boldsymbol{u}_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.\boldsymbol{M}.\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 0$$

където

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & -z_B & y_B \\ z_B & 0 & -x_B \\ -y_B & x_B & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & 32 & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (43)$$

Векторът на базата b се представя във вида:

$$\boldsymbol{b} = (x_B, y_B, z_B)^t \qquad (44)$$

B е съществена матрица, представена във вида:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -z_B & y_B \\ z_B & 0 & -x_B \\ -y_B & x_B & 0 \end{bmatrix} \qquad (45)$$

M се нарича *основна матрица*. Тя е алгебричният запис на епиполарната геометрия, при известни елементи на вътрешно ориентиране за камерата.

Ако се обозначат образите на точките в проективни кординати съответно с и u, където:

$$\tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (46)$$

Проективните матрици за двете точки са $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$. а пространствените хомогенни координати са съответно $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$. Образните хомогенни координати се получават съответно по зависимостите:

$$\tilde{u}_1 = \tilde{T}_1.\tilde{P}_1 \quad \text{и} \quad \tilde{u}_2 = \tilde{T}_2.\tilde{P}_2 \qquad (47)$$

Координатите на проекционните центрове се получават от зависимостите:

$$\tilde{T}_1.\tilde{s}_1 = 0 \ \text{ и } \ [T_1 \quad t_1]_1.\begin{bmatrix} s_1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{T}_2.\tilde{s}_2 = 0 \ \text{ и } \ \tilde{T}_2.\begin{bmatrix} s_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (48)$$

По този начин за координатите на проекционния център се получава:

$$s_1 = -T^{-1}.t \qquad (49)$$

За дадена точка $\mathbf{u_1}$ в първото изображение, неговата епиполарна линия lm може да се дефинира чрез две точки, едната от които е епиполюса $\mathbf{e_2}$.

$$e_2 = \tilde{T}_2.\begin{bmatrix} -T_1^{-1}.t \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (50)$$

Другата точка е безкрайната (убежна) точка на лъча, съединяващ проекционния център $\mathbf{S_1}$ с точката $\mathbf{u_1}$. Образът на тази точка във второто изображение се дава от зависимостта:

$$\tilde{u}_2 = T_2.T_1^{-1}.\tilde{u}_1 \qquad (51)$$

тъй като за точката в безкрайност имаме $[D \quad 0]^t$ се получава зависимостта:

$$\tilde{T}_1.\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{u}_1 \qquad (52)$$

За координатите на точката D се получава зависимостта:

$$D = T^{-1}.\tilde{u}_1 \qquad (53)$$

Линията, която преминава през двете точки се представя като векторно произведение на двата вектора:

$$l_u = \tilde{e}_2 \times \tilde{u}_2 \qquad (54)$$

Фундаменталната матрица се представя чрез зависимостта:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -e_{2z} & e_{2y} \\ e_{2z} & 0 & -e_{2x} \\ -e_{2y} & e_{2x} & 0 \end{bmatrix}.T_2.T_1^{-1} \qquad (55)$$

Съществува ясна линейна зависимост между пиксела и неговата епиполарна линия в проективни координати и зависимостта се дава чрез фундаменталната матирца $\mathbf{F}$. Още повече всеки пиксел $\mathbf{u_2}$ върху епиполарната линия за $\mathbf{u_1}$ удовлетворява уравнението:

$$\tilde{u}_2^t.\boldsymbol{F}.\tilde{u}_1 = 0 \qquad (56)$$

Образните точки и лъчите в евклидовото 3-D пространство се описват от зависимостите:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_1.\begin{bmatrix} x_1 - x_{S1} \\ y_1 - y_{S1} \\ f \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_2.\begin{bmatrix} x_2 - x_{S2} \\ y_2 - y_{S2} \\ f \end{bmatrix} \qquad (57)$$

Точката в хомогенни координати u и съответната и точка **u** са свързани със зависимостта:

$$\tilde{u}_2^t.\boldsymbol{I}_2^{-t}.\boldsymbol{M}.\boldsymbol{I}_1^{-1}.\tilde{u}_1 = 0 \qquad (58)$$

Окончателно за връзката между съществената и фундаменталната матрици се получава зависимостта:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_2^{-t}.\boldsymbol{M}.\boldsymbol{I}_1^{-1} \qquad (59)$$

Съществената и фундаменталната матрица притежават следните свойства:

- фундаменталната матрица обединява параметрите на вътрешно и външно ориентиране;

- съществената матрица **M** с размерност 3x3 притежава само 5 степени на свобода. За да се получат те е необходимо да се знаят параметрите на вътрешно ориентиране на двете камери;

- **F** преобразува образните точки в техните съответни епиполарни линии, което означава, че

$$\boldsymbol{F}.\boldsymbol{u}_1 = l_u \text{, тъй като } \boldsymbol{u}_2^t.l_u = \boldsymbol{u}_2^t.\boldsymbol{F}.\boldsymbol{u}_1 = 0 \qquad (60)$$

Съответно за левия образ се получава израза:

$$\boldsymbol{F}^t.\boldsymbol{u}_2 = l_{u2} \text{ следователно } l_{u2}^t.\boldsymbol{u}_1 = 0 \qquad (61)$$

-**F** преобразува епиполюсите в началото на съответната образна координатна система;

- **F** има 7 степени на свобода. В матрицата има 9 елемента, но само тяхното отношение е съществено, което оставя 8 степени на свобода. Допълнителна зависимост е равенството на нула на детерминантата на **F**

Det(F) = 0, (62)

което оставя само 7 степени на свобода.

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}.\boldsymbol{F}.\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (63)$$

или $u_2^t.F.u_1 = 0$, където **F** е матрица 3x3 с ранг 2.

Чрез фундаменталната матрица може да се определят параметрите необходими за създаване на двойка изображения при които няма вертикален паралакс. Новите изображения са трансформирани така, че епиполарните линии да са паралелни.

В термините на формирането на нормираните изображения координатите на трансформираните епиполарни изображения се дефинират от зависимостите, които дефинират нормираните образни координати за случая на нормално заснемане. Координатите на образните координати като функция на нормираните (идеалните координати се дават от изразите:

$$\xi = -c\frac{a_{11}\xi' + a_{21}\eta' - a_{31}c'}{a_{13}\xi' + a_{23}\eta' - a_{33}c'}$$

$$\eta = -c\frac{a_{12}\xi' + a_{22}\eta' - a_{32}c'}{a_{13}\xi' + a_{23}\eta' - a_{33}c'} \qquad (64)$$

Координатите на нормираните (епиполарни) изображения се дават от зависимостите:

$$\xi' = -c'\frac{a_{11}\xi + a_{21}\eta - a_{31}c}{a_{13}\xi + a_{23}\eta - a_{33}c}$$

$$\eta' = -c'\frac{a_{12}\xi + a_{22}\eta - a_{32}c}{a_{13}\xi + a_{23}\eta - a_{33}c} \qquad (65)$$

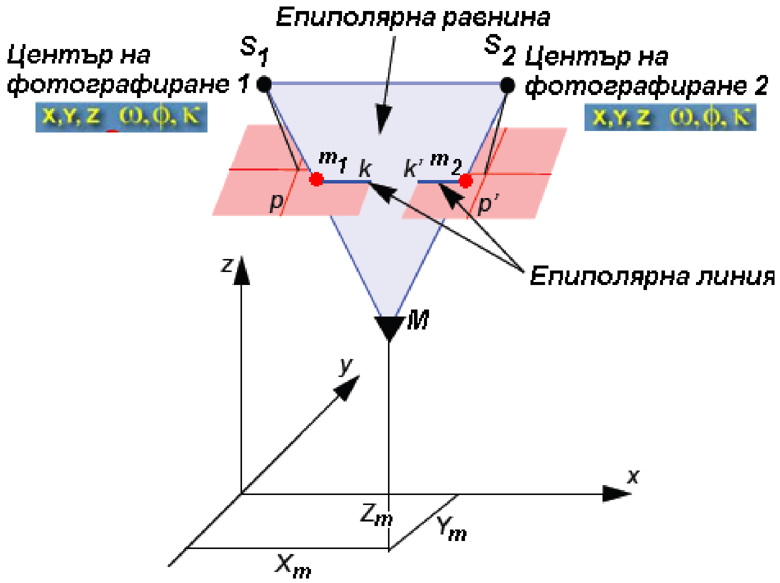
Координатите на епиполарните точки се получават от заместването на координатите на проекционните центрове в уравненията:

$$\xi_{K_1} = -c\frac{r_{11}b}{r_{13}b} \qquad \eta_{K_1} = -c\frac{r_{12}b}{r_{13}b} \qquad (66)$$

за лявата епиполарна точка. В общия случай се получава:

$$\xi_K = -c\frac{r_{11}}{r_{13}} \qquad \eta_K = -c\frac{r_{12}}{r_{13}} \qquad (67)$$

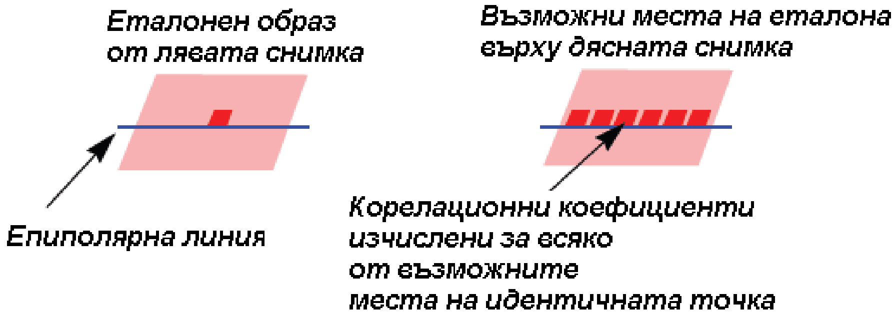
За да се ограничи зоната на търсене при автоматичното разпознаване на образи на точки в цифровата фотограметрия се използват следните основни методи:(фиг.39)



(Фиг. 39)

Ако са известни елементите на ориентиране на стереодвойката, то съответните проектиращи лъчи **S_1m_1M** и **S_2m_2M** са компланарни т.е. лежат в една равнина. Линията в която тази равнина пресича образните равнини на снимките се нарича епиполарна линия.

Използването на епиполарната геометрия позволява съществено да се намали заоната на търсене и изследване и тя да се ограничи само по направление на епиполарната линия построена за всяка двойка идентични точки от стереодвойката снимки (фиг. 40).



(Фиг. 40 Автоматична идентификация по направление на епиполарната линия)