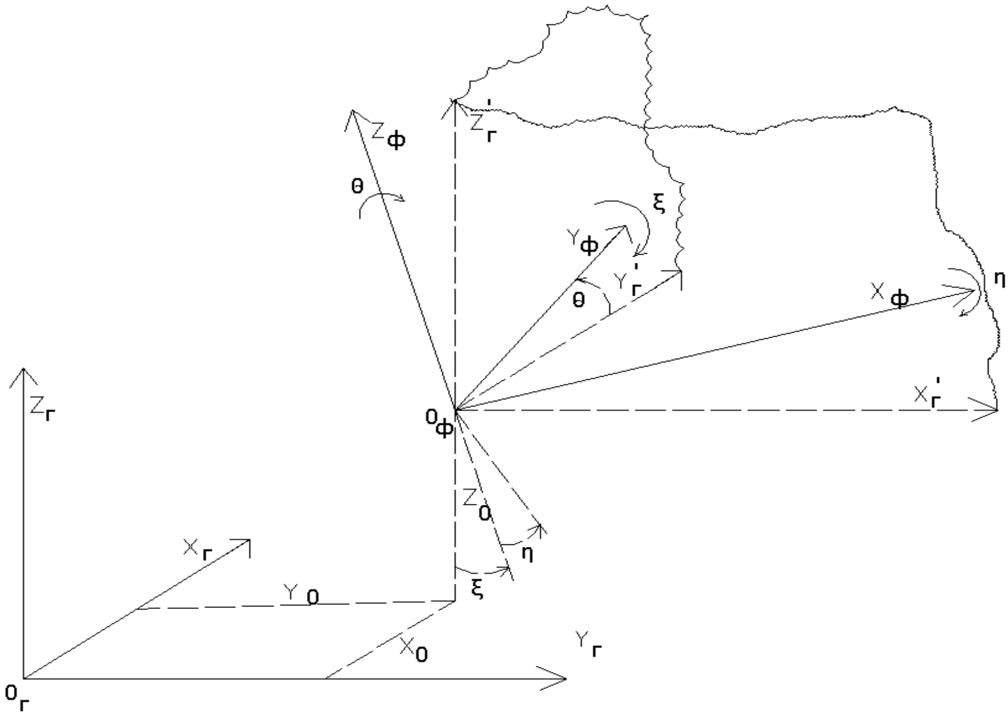
Обобщено представяне на трансформациите при фотограметричните модели

Често срещани задачи при редица построения на модели и етапи от процесите на ориентиране в аналитичната фотограметрия са координатните преобразования (трансформации) между използваните координатни системи. Така например при аналитичното определяне на елементите на външното ориентиране (фиг. 58) за въздушна снимка



(фиг. 58)

често срещана задача е: при известни фотограметрични координати (координатна система $O_{\phi}X_{\phi}Y_{\phi}Z_{\Phi}$) и геодезически координати (координатна система $O_{\Gamma}X_{\Gamma}Y_{\Gamma}Z_{\Gamma}$) на общи точки да се определят трансформационните параметри и да се трансформират фотограметричните координати на останалите точки от модела в геодезическата координатна система. (Задачата е известна още като "Аналитично определяне на елементите на външното ориентиране "

Матрица на преобразувания

Съгласно връзките при тримерни линейни трансформации (преобразуване на $O_{\phi}X_{\phi}Y_{\phi}Z$ -> $O_{\Gamma}X_{\Gamma}Y_{\Gamma}Z_{\Gamma}$) се дава с матрицата на преобразуване (4x4) от вида:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (176)$$

,където $\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = A_{\xi\eta\Theta}$ е ротационната матрица между двете координатни системи, чийто елементи са функции на ъгловите елементи на външното ориентиране $\begin{bmatrix} r_{30} & r_{31} & r_{32} \end{bmatrix}$ са транслационните параметри $\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{bmatrix}$ (координатите на началото на фотограметричната моделна система в геодезическата).

За много практически задачи елементите $\begin{bmatrix} r_{03} \\ r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ се приемат с означените стойности, като смисълът им е да отразяват разликите в мащабните нараствания по съответните координатни оси за разглежданите системи.

r_{03}-показва измененията по оста X;

r_{13}-по оста Y и r_{23}-по оста Z;

$r_{03}\, r_{33}$ се приема за 1

,което довежда до еднакви мащабни нараствания по всички координатни оси и се нарича коефициент на хомотетия. В смисъл на казаното по-горе координатното преобразуване може да се сведе до следните трансформационни формули:

$$\begin{bmatrix} X_\Gamma \\ Y_\Gamma \\ Z_\Gamma \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{H} \bullet \begin{bmatrix} X_\Phi & Y_\Phi & Z_\Phi & H \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & 0 \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & 0 \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (177)$$

Може да се каже, че вектора $\begin{bmatrix} X_\Phi & Y_\Phi & Z_\Phi & H \end{bmatrix}$ с фотограметрични координати, е вектор, описващ положението на точка във фотограметричната координатна система, разглеждан в едно четири мерно пространство. Четвъртата координата **H** е реално число, такова, че след операцията с транслационната матрица **R** да се преобразува във вектора с геодезически координати $\begin{bmatrix} X_\Gamma \\ Y_\Gamma \\ Z_\Gamma \\ 1 \end{bmatrix}$. В този смисъл $\frac{1}{H} = t$ се явява неизвестния мащабен коефициент. По този начин горните уравнения са подобни на тези при мащабните преобразувания, като разликата е, че за неизвестно тук се приема коефициента на хомотетия **H**, а не мащабното число. Те описват процеса на абсолютното ориентиране и дават връзка между фотограметрични и геодезически координати. В тях се съдържат 7 броя независими неизвестни $\xi, \eta, \theta, H, X_0, Y_0, Z_0$. Коефициентите $r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{20}, r_{21}, r_{22}$ са функции на ξ, η, θ и стойностите им и начина на образуване на ротационната матрица са както следва:

1.Въртене около ос $\mathbf{X_Г}$ на ъгъл ξ

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi & -\sin\xi \\ 0 & \sin\xi & \cos\xi \end{bmatrix} \tag{178}$$

2.Въртене около ос $\mathbf{Y_Г}$ на ъгъл η

$$A_\eta = \begin{bmatrix} \cos\eta & 0 & -\sin\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\eta & 0 & \cos\eta \end{bmatrix} \tag{179}$$

3.Въртене около ос $\mathbf{Z_Г}$ на ъгъл θ

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{180}$$

4.Коефициенти на ротационната матрица

$$r_{00} = \cos\eta\cos\theta; \quad r_{01} = \cos\eta\sin\theta \quad r_{02} = -\sin\eta$$

$$r_{10} = -\cos\xi\sin\theta - \sin\xi\sin\eta\cos\theta \quad r_{11} = \cos\xi\cos\theta - \sin\eta\sin\xi\sin\theta \quad r_{12} = \sin\xi\cos\eta$$

$$r_{20} = \sin\xi\sin\theta - \cos\xi\sin\eta\cos\theta \quad r_{11} = \cos\xi\cos\theta - \sin\eta\sin\xi\sin\theta \quad r_{22} = \cos\xi\cos\eta \tag{181}$$

Във формули (181) стойностите на коефициентите се отнасят за ляво ориентирана геодезическа координатна система.

Обобщено представяне на външното ориентиране

След заместване могат да се изведат уравненията на измерванията при организиране на един итерационен процес и параметрично изравнение:

$$X_Г = \frac{X_Ф}{H} r_{00} + \frac{Y_Ф}{H} r_{10} + \frac{Z_Ф}{H} r_{20} + \frac{X_0}{H}$$

$$Y_Г = \frac{X_Ф}{H} r_{10} + \frac{Y_Ф}{H} r_{11} + \frac{Z_Ф}{H} r_{12} + \frac{Y_0}{H} \quad X_Г = \frac{X_Ф}{H} r_{20} + \frac{Y_Ф}{H} r_{21} + \frac{Z_Ф}{H} r_{22} + \frac{Z_0}{H} \tag{182}$$

Като се приложи метода на функционалната итерация (метод на Нютон) може да се стигне до уравнения на поправките за едно параметрично изравнение.

$$X_Г = X_Г{}' + \frac{\partial X_Г}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial X_Г}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial X_Г}{\partial \Theta}\delta\theta + \frac{\partial X_Г}{\partial H}\delta H + \frac{\partial X_Г}{\partial X_0}$$

$$Y_Г = Y_Г{}' + \frac{\partial Y_Г}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial Y_Г}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial Y_Г}{\partial \Theta}\delta\theta + \frac{\partial Y_Г}{\partial H}\delta H + \frac{\partial Y_Г}{\partial Y_0}$$

$$Z_Г = Z_Г{}' + \frac{\partial Z_Г}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial Z_Г}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial Z_Г}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial Z_Г}{\partial H}\delta H + \frac{\partial Z_Г}{\partial Z_0} \qquad (183)$$

,където неизвестните елементи на външното ориентиране са представени като приблизителна стойност +поправка ($X_i = X_i + \delta X_i$)

$$V_X = A_\xi\delta\xi + A_\eta\delta\eta + A_\theta\delta\theta + A_H\delta H + A_{X_0}\delta X_0 + L_X$$
$$V_Y = B_\xi\delta\xi + B_\eta\delta\eta + B_\theta\delta\theta + B_H\delta H + B_{Y_0}\delta Y_0 + L_Y$$
$$V_Z = C_\xi\delta\xi + C_\eta\delta\eta + C_\theta\delta\theta + C_H\delta H + C_{Z_0}\delta Z_0 + L_Z \qquad (184)$$

Всяка точка която има **X,Y,Z** координати в двете координатни системи дава три уравнения на поправките от вида (184). Стойностите на коефициентите пред поправките на неизвестните са:

$$A_\xi = \frac{\partial X_Г}{\partial \xi} = -\frac{1}{H}(r_{20}X_Ф - r_{00}Z_ф) \qquad A_\eta = \frac{\partial X_Г}{\partial \eta} = -\frac{1}{H}(X_Ф tg\eta + (Y_Ф r_{12} + Z_Ф r_{22})\cos\theta)$$

$$A_\theta = \frac{\partial X_Г}{\partial \theta} = \frac{1}{H}(r_{11}Y_Ф - r_{01}X_ф) \qquad A_H = \frac{\partial X_Г}{\partial H} = \frac{1}{H}X_Г{}' \qquad A_{X_0} = \frac{\partial X_Г}{\partial X_0} = \frac{1}{H}$$

$$L_X = X_Г{}' - (X_Г)_{изч}$$

$$B_\xi = \frac{\partial Y_Г}{\partial \xi} = -\frac{1}{H}(r_{21}Y_Ф - r_{11}Z_ф)$$

$$B_\eta = \frac{\partial Y_Г}{\partial \eta} = -\frac{X_Ф}{H}\sin\eta\sin\theta - \frac{Y_Ф}{H}\cos\eta\sin\xi\sin\theta - \frac{Z_Ф}{H}\cos\xi\cos\eta\sin\theta$$

$$B_\theta = \frac{\partial Y_Г}{\partial \theta} = \frac{1}{H}(r_{00}X_Ф + r_{10}Y_Ф + r_{20}Z_ф)$$

$$B_H = \frac{\partial Y_Г}{\partial H} = \frac{1}{H}Y_Г{}' \qquad B_{X_0} = \frac{\partial Y_Г}{\partial Y_0} = \frac{1}{H}$$

$$L_Y = Y_Г{}' - (Y_Г)_{изч}$$

$$C_\xi = \frac{\partial Z_Г}{\partial \xi} = -\frac{1}{H}(r_{22}Y_Ф - r_{12}Z_ф)$$

$$C_\eta = \frac{\partial Z_Г}{\partial \eta} = -\frac{X_Ф}{H}\cos\eta - \frac{Y_Ф}{H}\sin\eta\sin\xi - \frac{Z_Ф}{H}\cos\xi\sin\eta$$

$$C_\theta = \frac{\partial Z_Г}{\partial \theta} = 0 \qquad C_H = \frac{\partial Z_Г}{\partial H} = \frac{1}{H}Z_Г{}' \qquad C_{X_0} = \frac{\partial Z_Г}{\partial Z_0} = \frac{1}{H} \qquad (185)$$

При $\xi = 0; \eta = 0; \theta = 0$ (начално приближение) се стига до следните уравнения:

$$X_Г = \frac{X_Ф}{H} + \frac{X_0}{H} = \frac{1}{H}(X_Ф + X_0) \qquad Y_Г = \frac{Y_Ф}{H} + \frac{Y_0}{H} = \frac{1}{H}(Y_Ф + Y_0)$$
$$Z_Г = \frac{Z_Ф}{H} + \frac{Z_0}{H} = \frac{1}{H}(Z_Ф + Z_0) \qquad (186)$$

,тоест при ортогонални трансформации между двете координатни системи $\frac{1}{H}$ се явява мащабен фактор.

Горното твърдение илюстрира, че с приемане за неизвестно коефициента на хомотетия, вместо мащабното число се постига едно по-голямо обобщение на разглеждането.

От уравненията за обобщеното представяне, ъгловите стойности на неизвестните и коефициента на хомотетия се съдържат във всички координатни уравнения, докато неизвестните координати на началото на фотограметричната система се срещат епизодично, в зависимост на вида уравнение (за **X**, **Y** или **Z**). Това е причината да съществуват начини за разделно определяне на трансформационните параметри (първо се определят ъгловите, а след това останалите), на които няма да се спираме.

Последващата обработка по МНМК (Метод на най-малките квадрати) може да стане както по преки (без образуване на нормална система), така и по непреки (с образуване на нормална система) начини.

Ще се спрем от непреките методи на метода на *Холецки-Банахевич -Златанов*, (алгоритъм Z) водещ до възможности за съкратен запис както на уравненията на поправките, така и на нормалната система. Изчислителния процес може да се организира с използване на релационна база от индексирани и свързани таблици и чрез актуализиране и промяна на съдържанието им от СУБД (система за управление на база данни) да се постигне по-голяма ефективност и прозрачност на изчислителния процес

Матричния запис на уравненията на поправките е:

$$\underset{(n,1)}{V} = \underset{(n,m)}{B}\,\underset{(m,1)}{\overline{X}} + \underset{(n,1)}{F} \quad , \tag{187}$$

n- брой измервания; **m**-брой неизвестни, при корелационна матрица $Q_F = Q_L$, $Rang(B) = m$, $Rang(Q_L) = n$

(188)

При прилагане на Алгоритъм Z се образува матрицата **Z** във вида:

$$\underset{(q,q)}{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ & Z_{22} & Z_{23} \\ & & Z_{33} \end{bmatrix}, \; q = m + n + 1;$$

$$\underset{(m,m)}{Z_{11}} = N = (B^t Q_L^{-1} B), \qquad \underset{(m,1)}{Z_{12}} = M = (B^t Q_L^{-1} F) \qquad \underset{(m,n)}{Z_{13}} = B^t$$

$$\underset{(1,1)}{Z_{22}} = F^t Q_L^{-1} F \quad \underset{(1,n)}{Z_{23}} = F^t \quad \underset{(n,n)}{Z_{33}} = 0 \tag{189}$$

Коефициентите в уравненията на поправките (матрицата **B**) са получени имайки в предвид, че в зависимост от вида уравнение (по **X**,**Y** или **Z**) се получават най- много 6 не нулеви елемента (пет за неизвестните и един за свободния член) за всяко уравнение на поправките, можем да използваме едномерен масив и да изчисляваме участието на всяко уравнение при образуване на нормалната система и оттам и на матрицата **Z**, съхранението на която обикновено е в едномерен масив и достъпът до елементи от този масив е удачно да се извършва чрез използване на множество от {**базови**} и {**колонни**} адреси .Удачно е следното подреждане на неизвестните:

Текущо уравнение на поправките

Vx	$\delta\xi$	$\delta\eta$	$\delta\Theta$	δH	δXo	Lx
Vy	$\delta\xi$	$\delta\eta$	$\delta\Theta$	δH	δYo	Ly
Vz	$\delta\xi$	$\delta\eta$	$\delta\Theta$	δH	δZo	LZ

едномерен масив B[0..5] за запис на текущото уравнение на поправките

(фиг.59)

Достъпът до елемент от съкратения запис на матрицата **Z** в едномерен масив се дава с изчисляване на индекса от масива IJ

$$IJ = (i-1)\cdot(2\cdot(U+1)-i)/2+j \qquad (190)$$

при **I**-реда и **J**- стълба;

Множеството на индексите на колонните адреси в случая ще бъде:

При уравнения за X-координатата:

{*множество колонни адреси*}={**J1=1,J2=2,J3=3,J4=4,J5=5,JM=6**}

При уравнения за Y-координатата:

{*множество колонни адреси*}={**J1=1,J2=2,J3=3,J4=4,J5=6,JM=**6}

При уравнения за Z-координатата:

{*множество колонни адреси*}={**J1=1,J2=2,J3=3,J4=4,J5=7,JM=6**}

Базовият адрес ще се определя от текущата стойност за реда **I** на матрицата **Z** в случай , че разглеждането се прави за определяне елементи на външно ориентиране или параметри на трансформация за един модел(реален или фиктивен).

{**базов адрес**}$=(i-1)\cdot(2\cdot(U+1)-i)/2$ (190)

Под модел може да се разбира снимка или група от снимки. Ако целта е в отделни зони (снимки) да се определят различни трансформационни параметри то тогава базовите адреси ще се пресмятат като във формулите по-горе на мястото на **I** се постави съответния колонен индекс (**J1.. JM**)

{**адрес на елемент**}={**базов**}+{**колонен**}
(191)

Същността на **Z**-алгоритъма се състои в последователно преобразуване на матрицата Z, за целта се използват формули :

$$Z_{kk}^{(k)} = +\sqrt{Z_{kk}^{(k-1)}} \qquad Z_{kj}^{(k)} = Z_{kj}^{(k-1)}/Z_{kk}^{(k)},\ j=\overline{k+1,q}$$

$$Z_{ij}^{(k)} = Z_{ij}^{(k-1)} - Z_{ki}^{(k)}Z_{kj}^{(k)},\ i=\overline{k+1,q}.,\ j=\overline{i,q} \qquad (192)$$

След **m**-редукции за **Z** се получава:

$$\tilde{Z}=\begin{bmatrix} R & \rho & B^t \\ - & V^t Q_L^{-1} V & V^t \\ - & - & Q_L \end{bmatrix},\ \overline{R}=\begin{bmatrix} R & \rho \\ - & 1 \end{bmatrix},\ \overline{R}^{-1}=\begin{bmatrix} R^{-1} & X \\ - & 1 \end{bmatrix} \tag{193}$$

Корелационната матрица за неизвестните Q_X се изчислява по формулата:

$$Q_X = R^{-1} R^{-1'} \tag{194}$$

Определянето на неизвестните трансформационни параметри, които в случая са и елементите на външното ориентиране по метода на функционалната итерация се извършва като се налага критерий (допуск) за сходимост при решението. Най –често това е разликата в относителните грешки на неизвестните от две последващи итерации. (Приема се тя да е по-малка от число, съизмеримо с точността на входните данни).

За приблизителни стойности на неизвестните при началната итерация могат да се приемат :

- нули за ъгловите елементи;
- единица за Н;
- по формули да се получат началните стойности за X_0, Y_0, Z_o.

Необходимо е също така да се работи с нормирани поправки, като за целта се извърши нормиране , чрез изравняване на димeнсийте по координатните оси от двете координатни системи (фотограметрична и геодезическа), както и да се редуцират спрямо центровете на тежестта (средноаритметичното), координатите от двете координатни системи.

След определяне на трансформационните параметри за модела, могат да се изчислят геодезическите координати на всички точки от модела.